第23講　積分でやっておきたいこと（その1）

23

［A］ 次の問いに答えよ．

(1) 任意の実数 t に対して，t を定数とする次の3次方程式はただ1つの実数解をもつことを示せ．

$$x^3+12x=t$$

以下，この実数解を $f(t)$ と表す．

(2) 関数 $f(t)$ のグラフのおよその様子を描け．

(3) xy 平面上の動点Pの x 座標，y 座標が時刻 t の関数として $x=f(t)$，$y=\dfrac{1}{4}\{f(t)\}^2$ で与えられているとする．点 $(0,\ 1)$ をFとするとき，時刻 t $(t\geqq 0)$ から時刻 $t+h$ $(h>0)$ までの間に線分FPの通過する部分の面積を S とする．このとき，

(I) S を求め，S は t に関係しないことを示せ．

(II) 時刻 t のとき，加速度ベクトルを方向ベクトルとし，点Pを通る直線は定点を通ることを示せ．

［B］ 自然数 n に対して，関数 $f_n(x)=x^ne^{1-x}$ と，その定積分 $a_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ を考える．ただし，e は自然対数の底である．次の問いに答えよ．

(1) 区間 $0\leqq x\leqq 1$ 上で $0\leqq f_n(x)\leqq 1$ であることを示し，さらに $0<a_n<1$ が成り立つことを示せ．

(2) a_1 を求めよ．$n>1$ に対して a_n と a_{n-1} の間の漸化式を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，等式 $\dfrac{a_n}{n!}=e-\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)$ が成り立つことを証明せよ．

(4) いかなる自然数 n に対しても，$n!e$ は整数とならないことを示せ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 23 講　積分でやっておきたいこと（その１）

23　曲線 $y=e^x$ の $0 \leqq x \leqq 3$ に対応する部分を y 軸のまわりに回転してできる容器がある．これに毎秒 a の割合で上から水を注ぐ．

(1)　この容器に水がいっぱいになるのは何秒後か．

(2)　この水面の上昇速度が毎秒 $\dfrac{a}{4\pi}$ になった瞬間の水深を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第23講　積分でやっておきたいこと（その1）

23

［A］ 次の問いに答えよ．

(1) 任意の実数 t に対して，t を定数とする次の3次方程式はただ1つの実数解をもつことを示せ．

$$x^3+12x=t$$

以下，この実数解を $f(t)$ と表す．

(2) 関数 $f(t)$ のグラフのおよその様子を描け．

(3) xy 平面上の動点Pの x 座標，y 座標が時刻 t の関数として $x=f(t)$，$y=\dfrac{1}{4}\{f(t)\}^2$ で与えられているとする．点 $(0,\ 1)$ をFとするとき，時刻 t $(t\geqq 0)$ から時刻 $t+h$ $(h>0)$ までの間に線分FPの通過する部分の面積を S とする．このとき，

(I) S を求め，S は t に関係しないことを示せ．

(II) 時刻 t のとき，加速度ベクトルを方向ベクトルとし，点Pを通る直線は定点を通ることを示せ．

［B］ 自然数 n に対して，関数 $f_n(x)=x^ne^{1-x}$ と，その定積分 $a_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ を考える．ただし，e は自然対数の底である．次の問いに答えよ．

(1) 区間 $0\leqq x\leqq 1$ 上で $0\leqq f_n(x)\leqq 1$ であることを示し，さらに $0<a_n<1$ が成り立つことを示せ．

(2) a_1 を求めよ．$n>1$ に対して a_n と a_{n-1} の間の漸化式を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，等式 $\dfrac{a_n}{n!}=e-\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)$ が成り立つことを証明せよ．

(4) いかなる自然数 n に対しても，$n!e$ は整数とならないことを示せ．

【答】　［A］ 略

［B］ (1) 略　(2) $a_1=e-2$，$a_n=na_{n-1}-1$　(3) 略　(4) 略

【解説】

［A］ (1) $g(x)=x^3+12x$ とおくと

$$g'(x)=3x^2+12>0$$

$t=0$ のとき $g(0)=0$ より $x=0$ が解．

$t\neq 0$ のとき

$$g\left(\frac{1}{12}t\right)=\frac{1}{12^3}t^3+t,\qquad g(0)=0$$

となることより $\left\{g\left(\dfrac{1}{12}t\right)-t\right\}\{g(0)-t\}<0$ であるから $g(x)=t$ の実数解は0と $\dfrac{1}{12}t$ の間にただ1つ存在する．

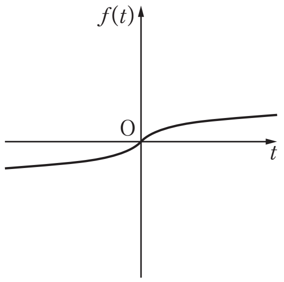
ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$f(x)$ と $g(x)$ は互いに逆関数である．つまり

$$g(x)=t \iff x=f(t)$$

という関係であるので，グラフは右図のようになる．



(3)　(Ⅰ)　$\alpha=f(t)$，$\beta=f(t+h)$ とおくと

$$\alpha^3+12\alpha=t,\ \beta^3+12\beta=t+h$$

である．このとき

$$S=\left(1+\frac{1}{4}\beta^2\right)\times\beta\times\frac{1}{2}-\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\right)\times\alpha\times\frac{1}{2}-\int_\alpha^\beta\frac{1}{4}x^2dx$$

$$=\frac{1}{24}(\beta^3+12\beta)-\frac{1}{24}(\alpha^3+12\alpha)$$

$$=\frac{1}{24}(t+h)-\frac{1}{24}t=\frac{1}{24}h$$

よって S は t に関係しない．

(Ⅱ)　$x^3+12x=t$ より

$$3(x^2+4)\frac{dx}{dt}=1 \qquad \therefore\ 6x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+3(x^2+4)\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

ゆえに

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{x}{2(y+1)}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

また $y=\frac{1}{4}x^2$ より

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}x\frac{dx}{dt}$$

$$\therefore\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}x\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{-y+1}{2(y+1)}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

よって

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)/\!/\,(-x,\ -y+1)$$

$$\perp(1-y,\ x)$$

となるので点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ とすると，題意の直線は

$$(1-q)(x-p)+p(y-q)=0$$

$$\iff (1-q)x+py-p=0$$

$$\iff p(y-1)-\frac{1}{4}p^2x+x=0$$

となる．これが p に関する恒等式より

$$y-1=x=0$$

よってこの直線は定点 $(0,\ 1)$ を通る．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］ (1)　n は自然数で $0 \leqq x \leqq 1$ より

$$f_n'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} + x^n(-e^{1-x})$$
$$= x^{n-1}e^{1-x}(n-x) \geqq 0$$

$f_n(0)=0$，$f_n(1)=1$ であるので

$$0 \leqq f_n(x) \leqq 1$$

区間 [0，1] で積分すると，

$$\int_0^1 0\,dx < \int_0^1 f_n(x)\,dx < \int_0^1 1\,dx \qquad \therefore \quad 0 < a_n < 1$$

(2)　$f_1(x) = xe^{1-x}$ であり $\{-(x+1)e^{1-x}\}' = xe^{1-x}$ より

$$a_1 = \int_0^1 f_1(x)\,dx = \Big[-(x+1)e^{1-x}\Big]_0^1 = \boldsymbol{e-2}$$

また

$$a_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$$
$$= \Big[x^n(-e^{1-x})\Big]_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1}(-e^{1-x})\,dx$$
$$= -1 + n\int_0^1 x^{n-1}e^{1-x}\,dx$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = na_{n-1} - 1}$$

(3)　$a_n = na_{n-1} - 1 \iff \dfrac{a_n}{n!} = \dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!} - \dfrac{1}{n!}$

よって

$$\frac{a_n}{n!} = \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$$
$$= \frac{a_{n-2}}{(n-2)!} - \left\{\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right\}$$
$$= \cdots = \frac{a_1}{1!} - \left\{\frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right\}$$
$$= e - 2 - \left(\frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$
$$= e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

(4)　(3)より

$$n!e = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)n! + a_n$$

である．ここで

$$\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)n!$$
$$= n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!}$$

よりこれは整数である．また(1)から $0 < a_n < 1$ より $n!e$ は整数となることはない．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 23 講　積分でやっておきたいこと（その１）

23　曲線 $y=e^x$ の $0\leqq x\leqq 3$ に対応する部分を y 軸のまわりに回転してできる容器がある．これに毎秒 a の割合で上から水を注ぐ．

(1)　この容器に水がいっぱいになるのは何秒後か．

(2)　この水面の上昇速度が毎秒 $\dfrac{a}{4\pi}$ になった瞬間の水深を求めよ．

【答】 (1) $\dfrac{5e^3-2}{a}\pi$ 秒後　(2) e^2-1

【解説】

(1)　$0\leqq x\leqq 3$ に対応する部分は $1\leqq y\leqq e^3$ となるので，この容器の体積 V は

$$V=\int_1^{e^3}\pi x^2dy$$

で求められる．ここで，$y=e^x$ より

$$dy=e^xdx$$

などより，

$$\begin{aligned}V&=\int_0^3\pi x^2\cdot e^xdx\\&=\Big[\pi(x^2-2x+2)e^x\Big]_0^3\\&=(5e^3-2)\pi\end{aligned}$$

よって，求める時間は

$$\boldsymbol{\frac{5e^3-2}{a}\pi}\ \textbf{秒後}$$

(2)　水面の上昇速度 $\varDelta h$ について

$$\varDelta h\times(\text{水面の面積})=a$$

が成り立つので

$$\frac{a}{4\pi}\times\pi x^2=a$$

$$\iff\quad x=2$$

このとき水深は（$y=1$ が底であることに注意すると）

$$\boldsymbol{e^2-1}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。